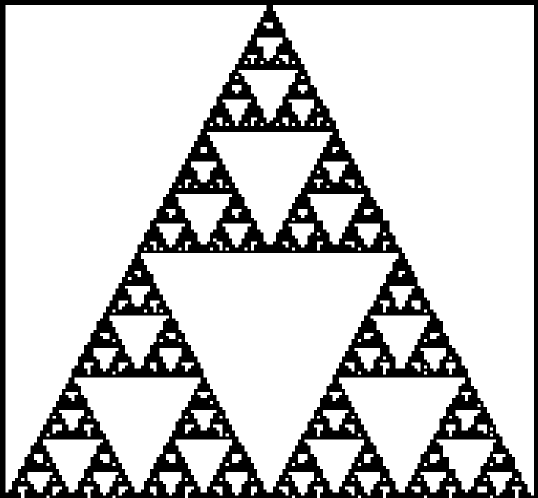
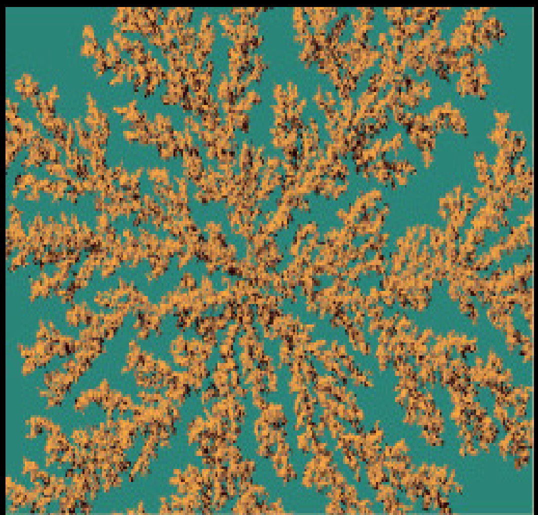
Fractais e a geometria da natureza

Ana Nunes
CFTC e DF FCUL

28 de Outubro de 2008

Fractais e a geometria da natureza





INVARÂNCIA DE ESCALA

A auto-semelhança mediante rescalamento é a uma característica geométrica dos fractais. Os matemáticos inventaram maneiras de construir objectos com estas propriedades, como o triângulo de Sierpinski.

FRACTAIS NA NATUREZA

Mais uma vez, as abstractas construções da matemática encontraram contrapartida na natureza, dos agregados de galáxias aos sistemas de transporte de nutrientes em plantas e animais.

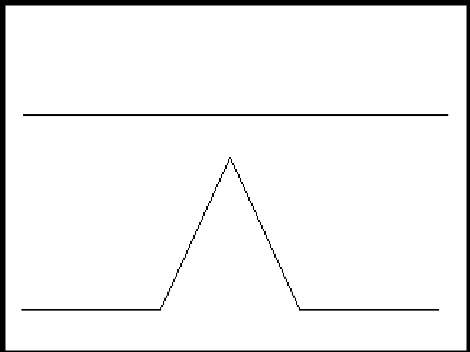
Como descrever esta geometria ?

Fractais e a geometria da natureza

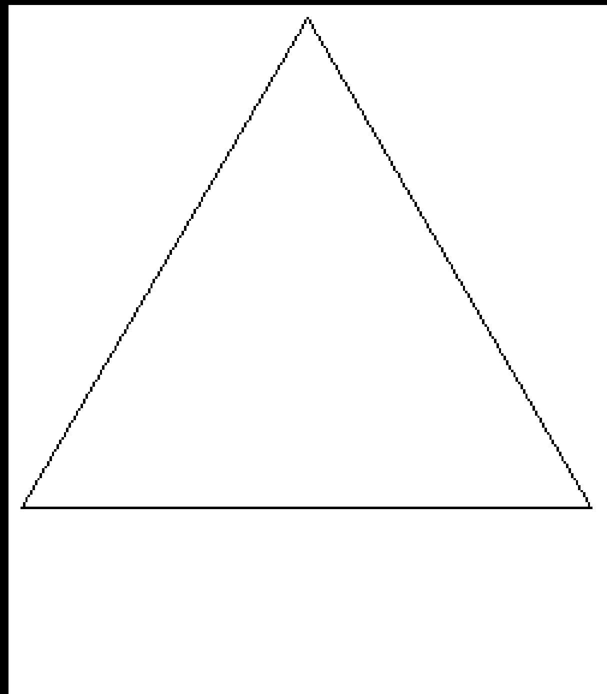
- Fractais deterministas
- Dimensão fractal
- Fractais como pontos fixos de transformações
- Fractais aleatórios e DLA
- Estrutura de larga escala do universo
- Relações alométricas e scaling em biologia
- Outros exemplos de fractais na natureza
- Fractais e dinâmica caótica
- Dinâmica complexa e o conjunto de Mandelbrot

- Fractais deterministas

A partir da iteração de operações geométricas simples é possível construir objectos com propriedades muito singulares



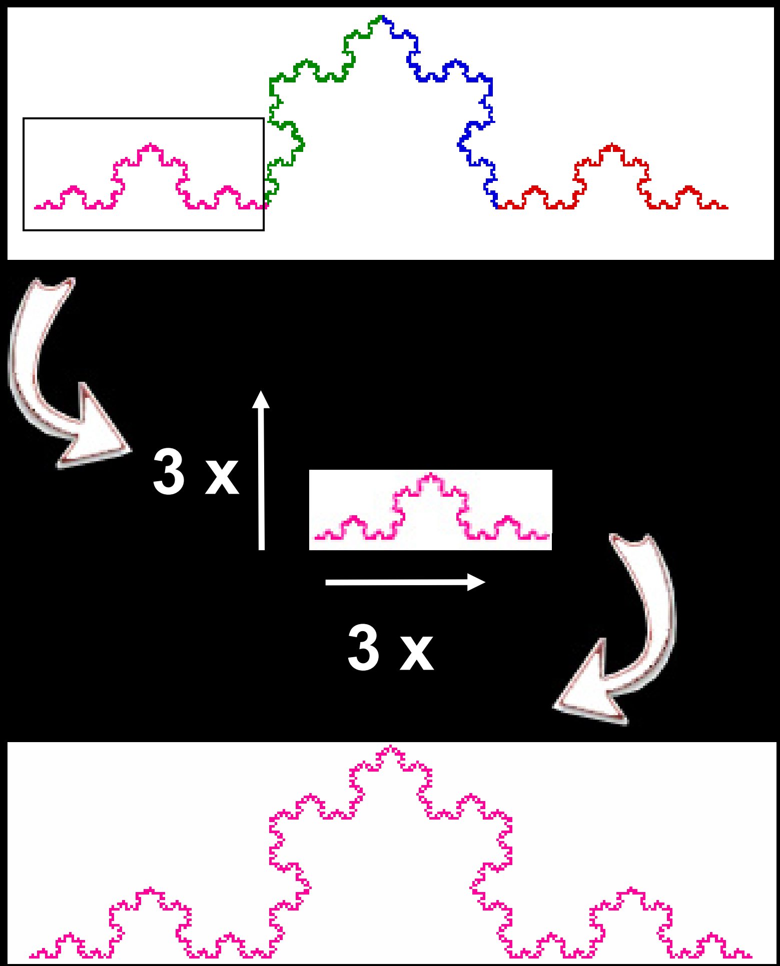
a regra de construção
é aplicada
iterativamente



Um segmento de comprimento 1 dá origem a uma linha de comprimento 4/3

Um destes ‘monstros’ é a curva de Koch

Auto-semelhança da curva de Koch



Objectos como a curva de Koch e o triângulo de Sierpinski, construídos a partir de regras recursivas simples, são feitos de cópias mais pequenas de si próprios.

Estes objectos têm invariância de escala, ou auto-semelhança exacta mediante rescalamento.

Será que estas construções abstractas têm alguma aplicação?

Muitas formas naturais são aproximadamente auto-semelhantes ao longo de várias ordens de grandeza.

Encontrámos também outras formas de auto-semelhança no diagrama de bifurcação da aplicação logística.

Podemos então imaginar objectos com vários tipos de auto-semelhança. Tal como a curva de Koch, estes objectos terão estrutura a todas as escalas, ou ausência de escala característica.

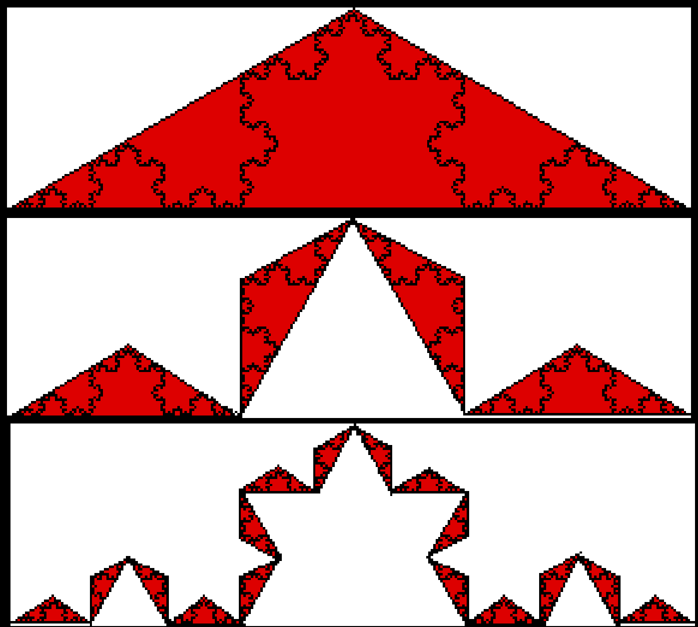
Vamos chamar fractais a estes objectos e tomar a curva de Koch como um modelo simples.

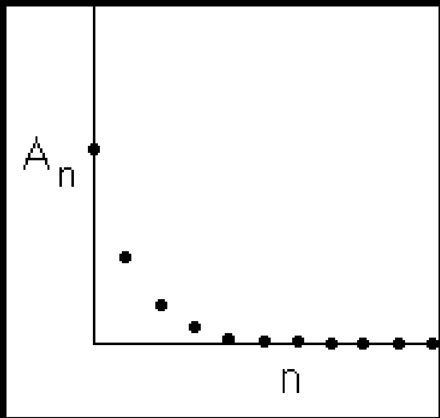
Comprimento e área não medem bem a curva de Koch

A curva de Koch tem comprimento infinito ...

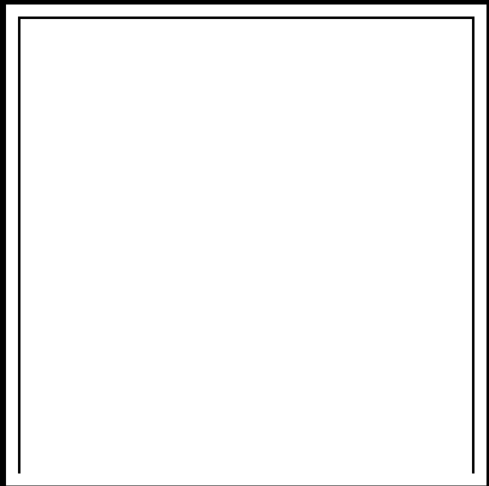
$$3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 16/3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 3\,(4/3)^n \longrightarrow \infty$$

...mas tem área zero





http://classes.yale.edu/fractals/



Curvas muito 'retorcidas', como a curva de Hilbert, podem encher uma superfície

Nem comprimento nem área servem para medir a curva de Koch

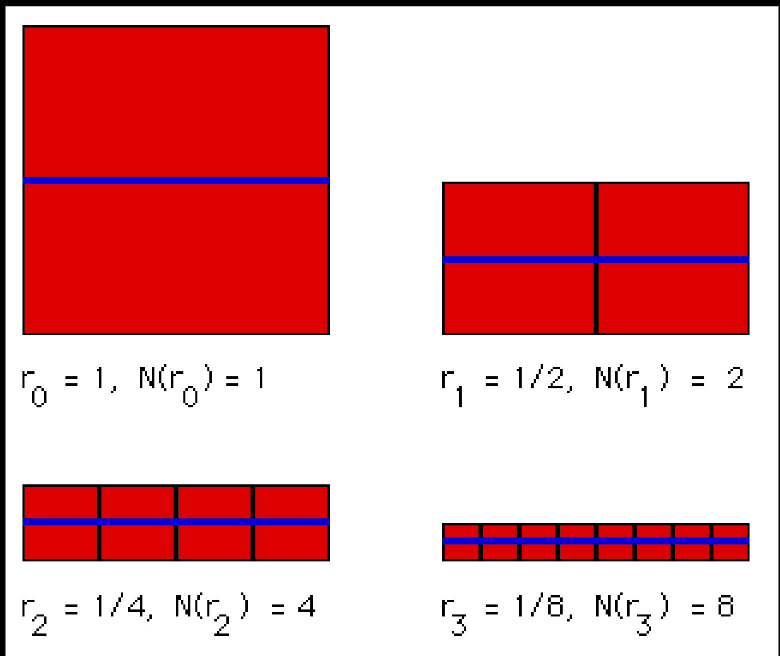
A curva de Koch é 'mais' que uma linha, e 'menos' que uma superfície

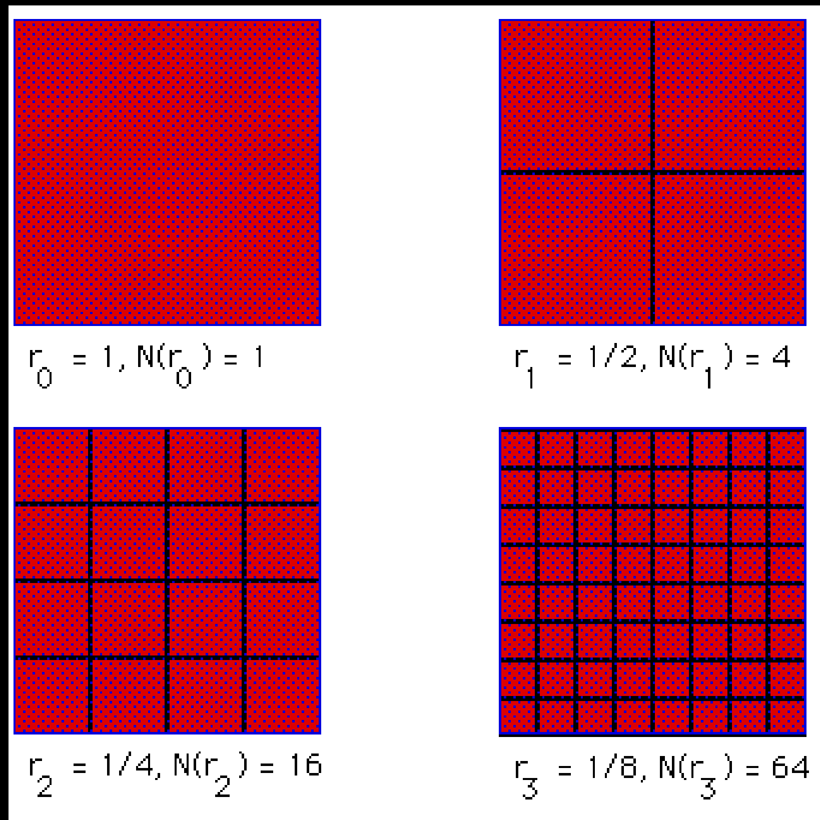
Como medir então a curva de Koch ?

- **Dimensão fractal**

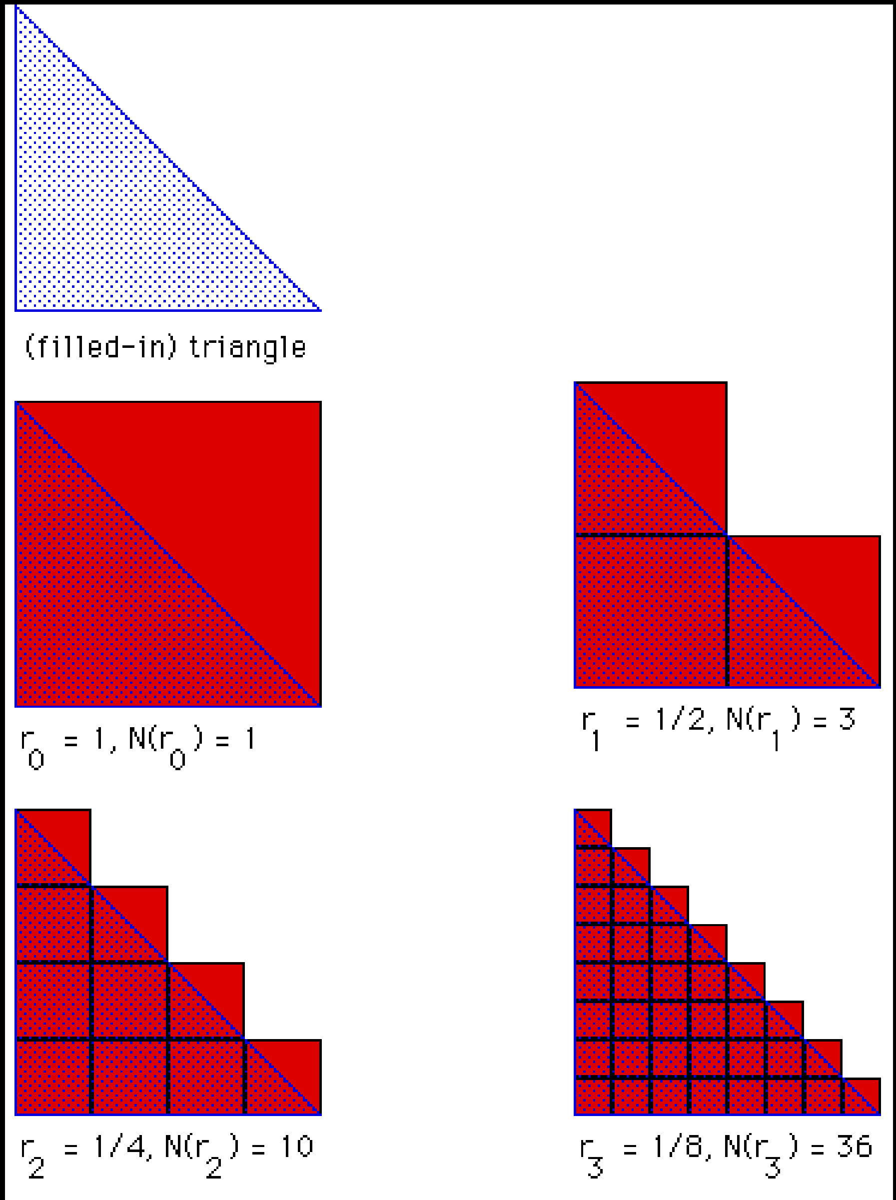
Para objectos geométricos 'clássicos' há uma relação simples entre a dimensão, o número de 'caixas' necessário para os recobrir e o tamanho dessas caixas.

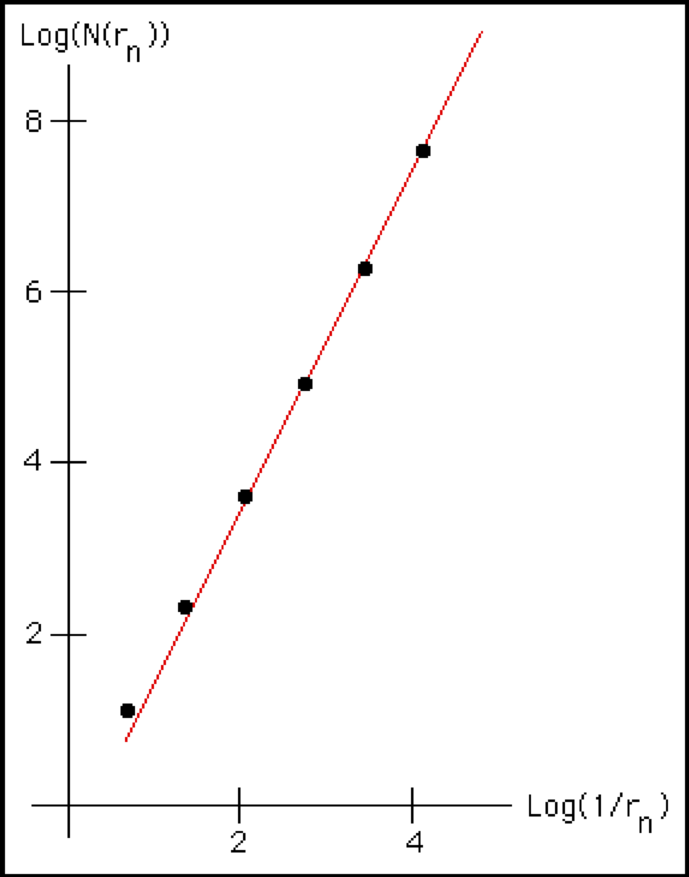
$$N\,(r_n) = 1/(r_n)^d$$





http://classes.yale.edu/fractals/





$d \sim -\log N(r_n) / \log r_n$

$d = 2$

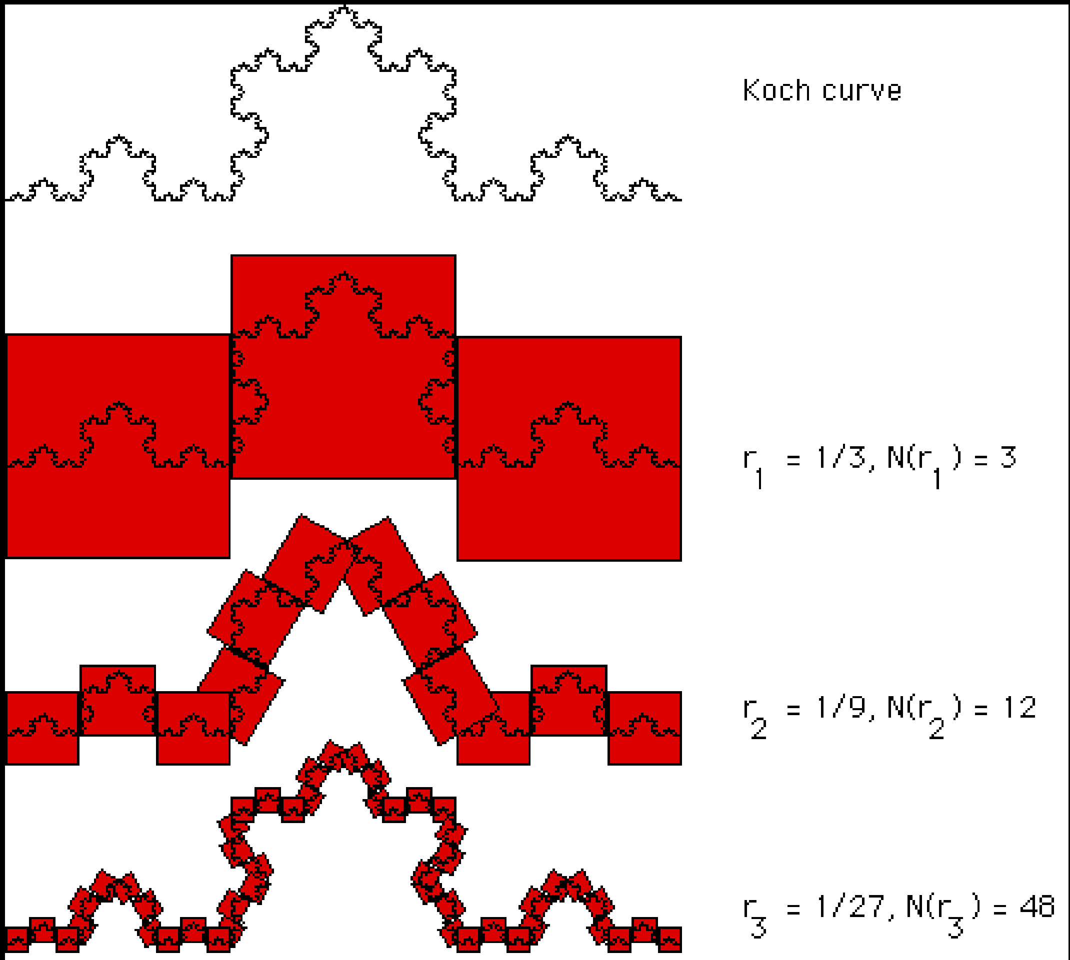
http://classes.yale.edu/fractals/

$d \sim -\log N(r_n) / \log r_n$

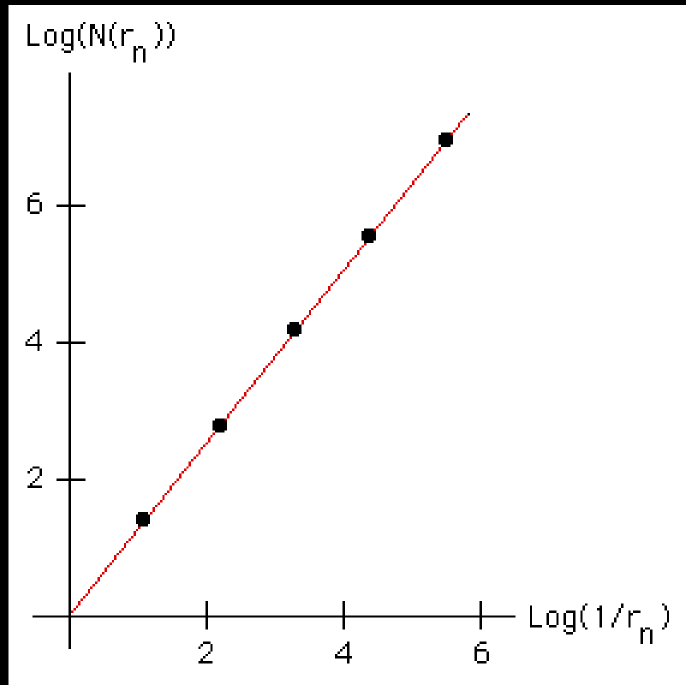
dimensão de contagem de caixas

é uma dimensão 'fractal' porque pode em princípio assumir valores não inteiros

Quanto vale d para a curva de Koch ?



http://classes.yale.edu/fractals/

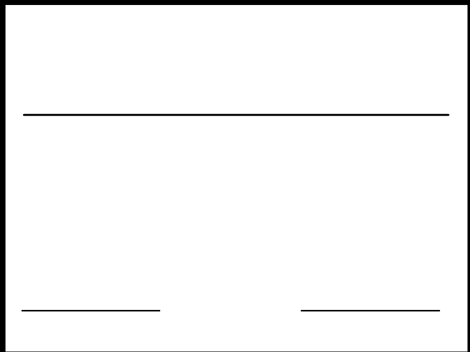


$d \sim -\log N(r_n) / \log r_n$

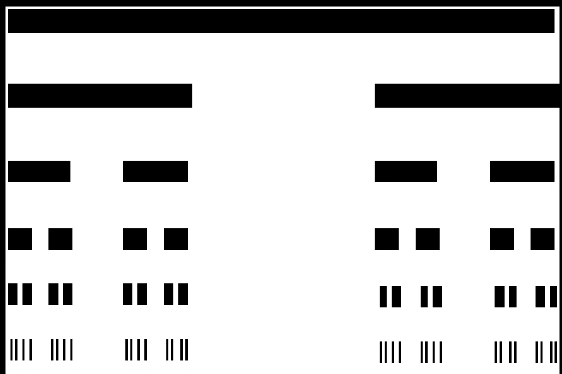
$d \approx 1.26$

A curva de Koch tem dimensão fractal não inteira !

▪ **Fractais como pontos fixos de transformações**



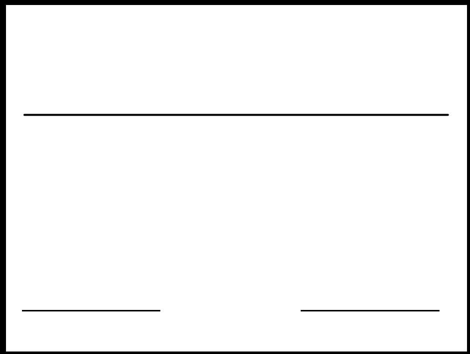
Consideremos outra regra iterativa simples a actuar num segmento de recta



Esta regra gera o conjunto de Cantor 1/3.

É ‘mais’ do que um conjunto de pontos e ‘menos’ do que uma linha, tem dimensão fractal

$$d = \log 2 / \log 3$$

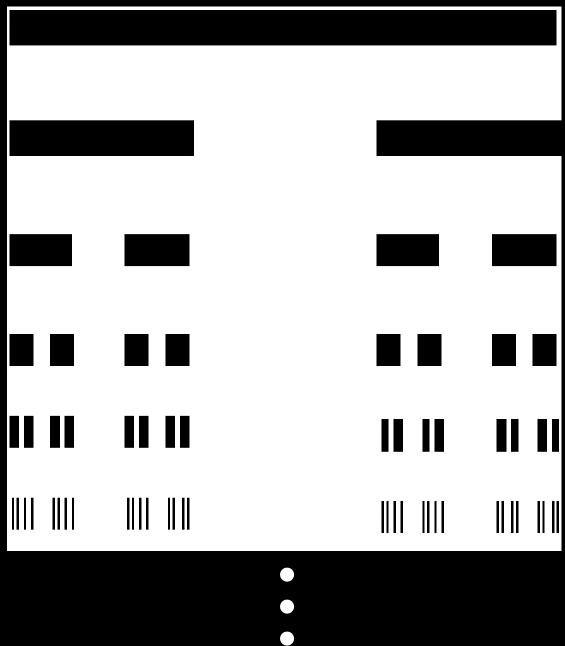


Consideremos as funções

$$\omega_1(x) = x/3, \; \omega_2(x) = x/3 + 2/3$$

e a transformação do intervalo [0,1]

$$W([0,1]) = \omega_1([0,1]) \cup \omega_2([0,1])$$



$[0,1]$

$W([0,1])$

$W(W([0,1]))$

$W^3([0,1])$

$W^4([0,1])$

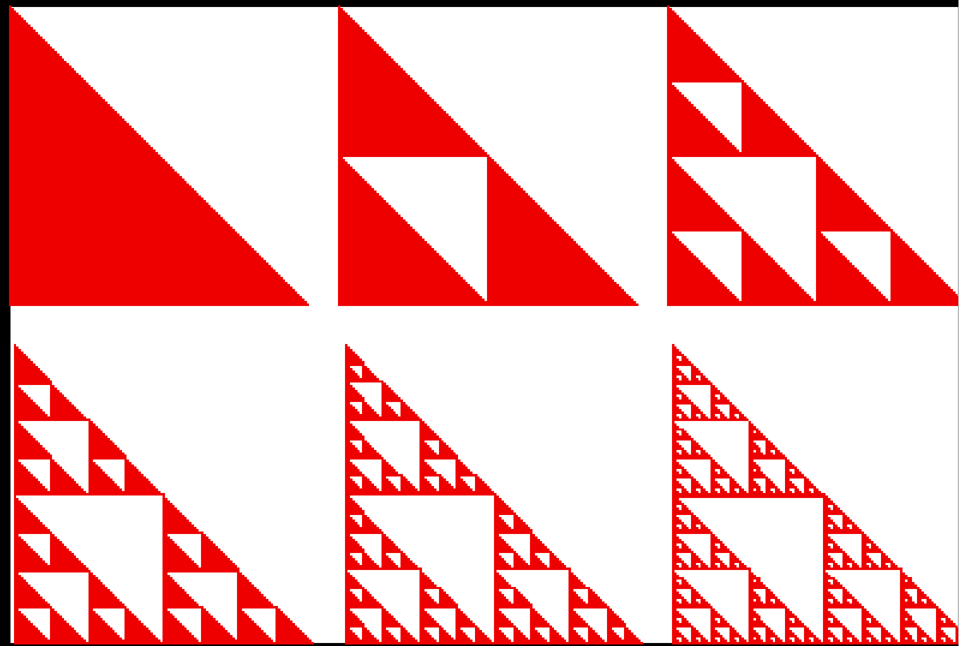
$W^5([0,1])$

$\vdots$

A transformação W é a geradora do Cantor 1/3, e este é invariante para W.

Transformação geradora do triângulo de Sierpinski

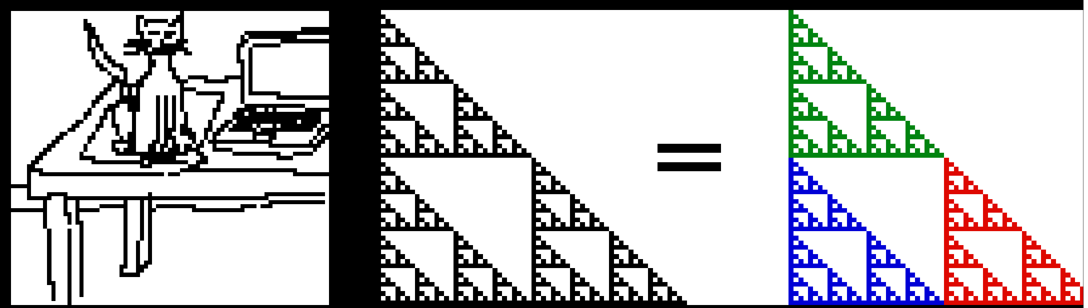
$$\omega_1\ (x,y) = (x/2,y/2)$$
$$\omega_2\ (x,y) = (x/2,y/2) + (1/2,0)$$
$$\omega_2\ (x,y) = (x/2,y/2) + (0,1/2)$$



$$W(T) = \omega_1\ (T) \cup \omega_2\ (T) \cup \omega_3\ (T)$$

$$W^n(T) \longrightarrow S$$

O conjunto limite só depende da transformação W

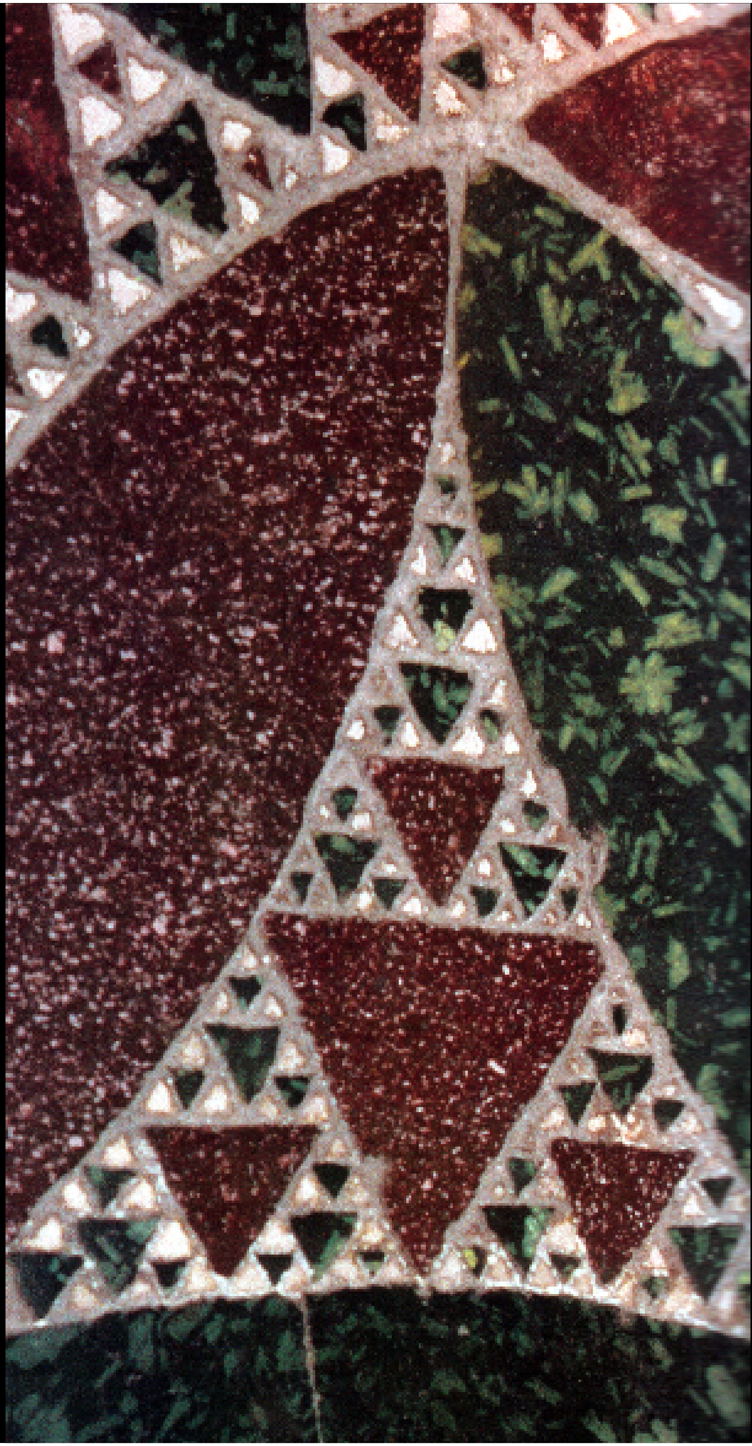


http://classes.yale.edu/fractals/

http://classes.yale.edu/fractals/

Mosaico do sec. XII

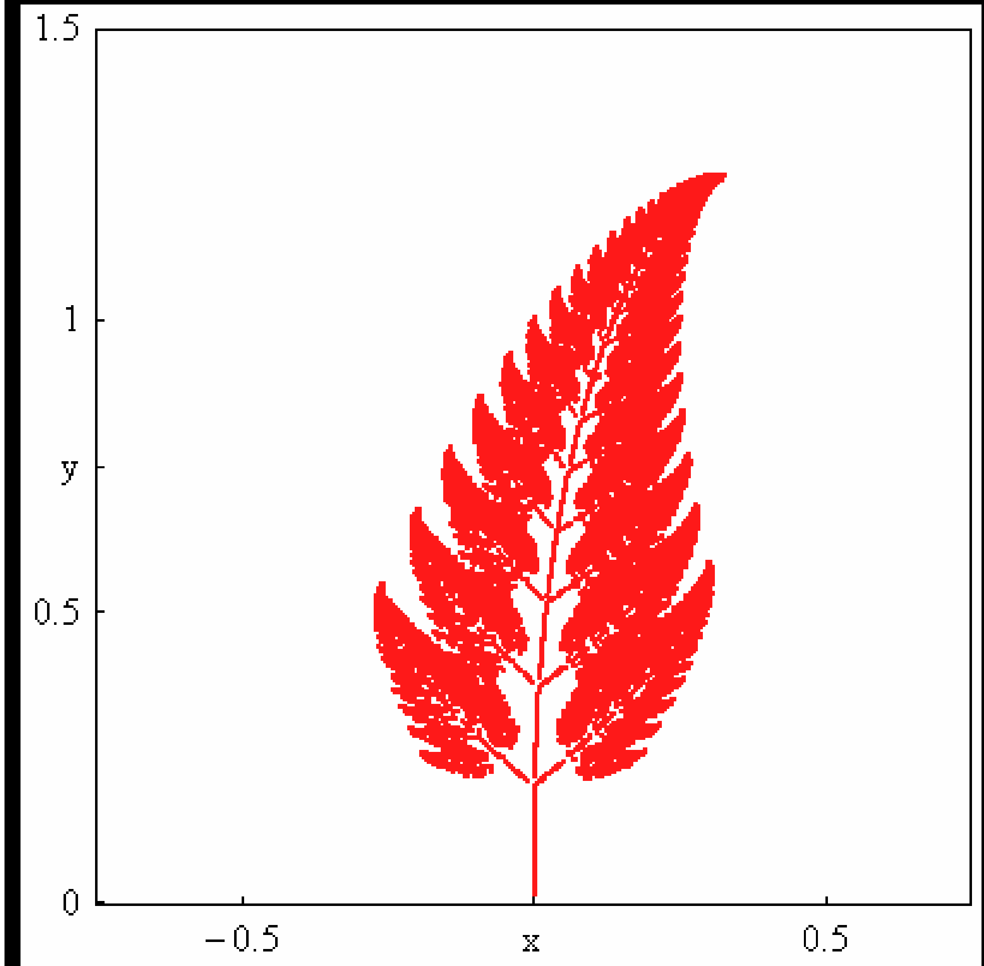
Basilica de S. Clemente secs. IV-XVIII, Roma



Mosaico do sec. XIII

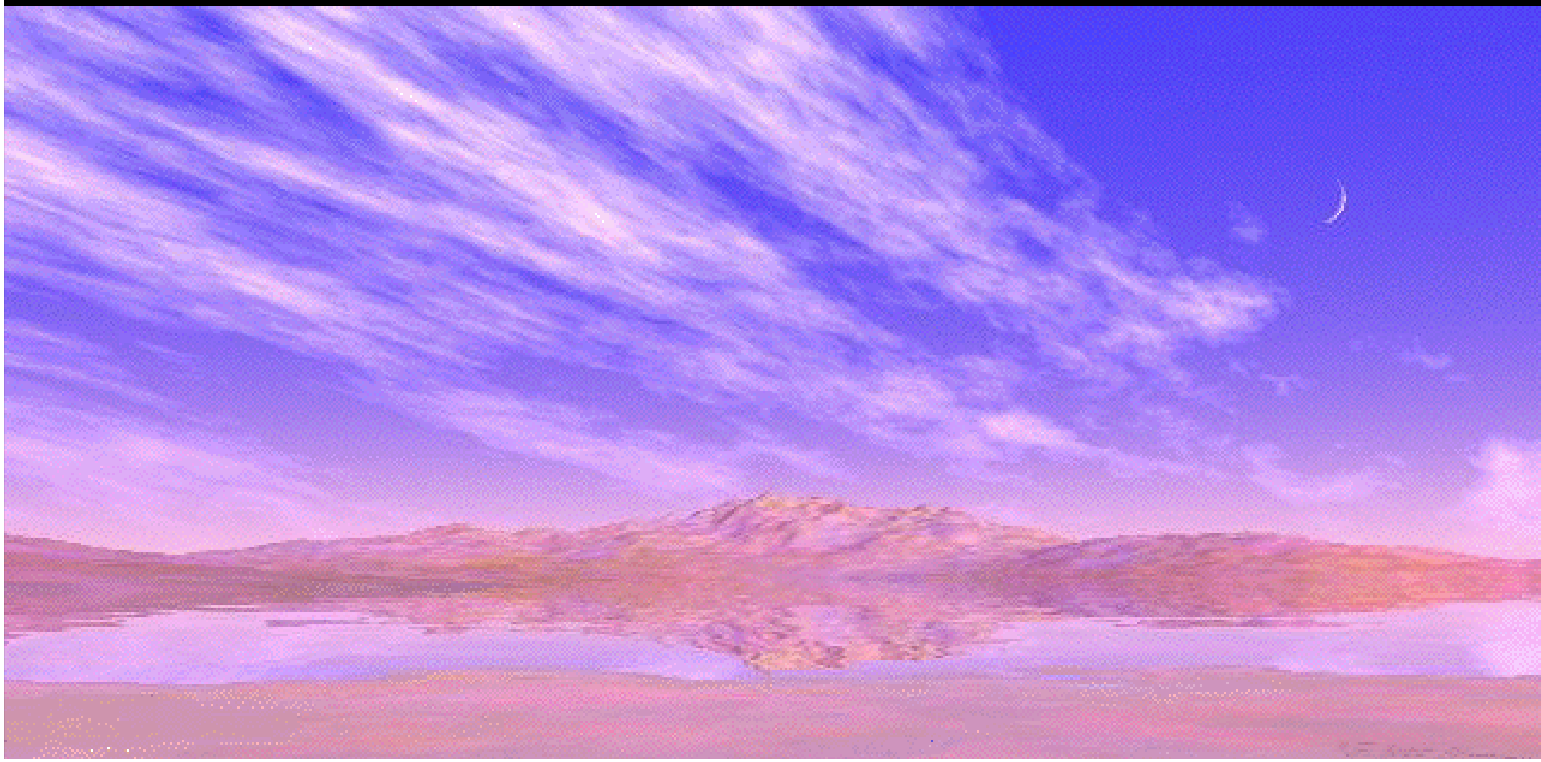
Catedral de S. Maria
secs. XI-XIII, Anagni

D Stauffer e H E Stanley,
From Newton to Mandelbrot,
Springer, 1995.

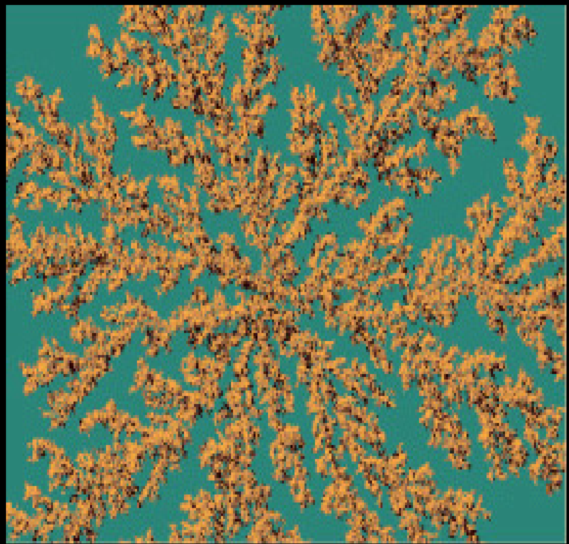


Transformações simples como as que acabamos de ver permitem ‘falsificações fractais’ já bastante convincentes ...

...mas que ficam muito aquém das paisagens fractais de alta tecnologia, como as fabricadas por Ken Musgrave



- Fractais aleatórios e DLA



Os fractais que reconhecemos na natureza envolvem alguma aleatoriedade.

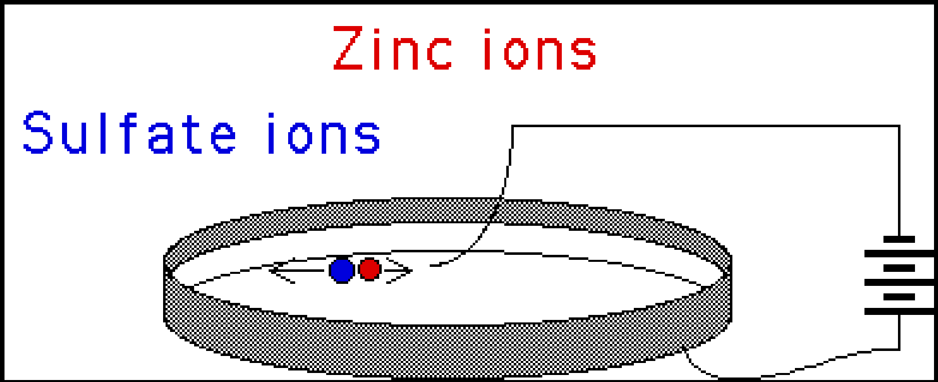
Têm propriedades de auto-semelhança diferentes das que vimos até agora.

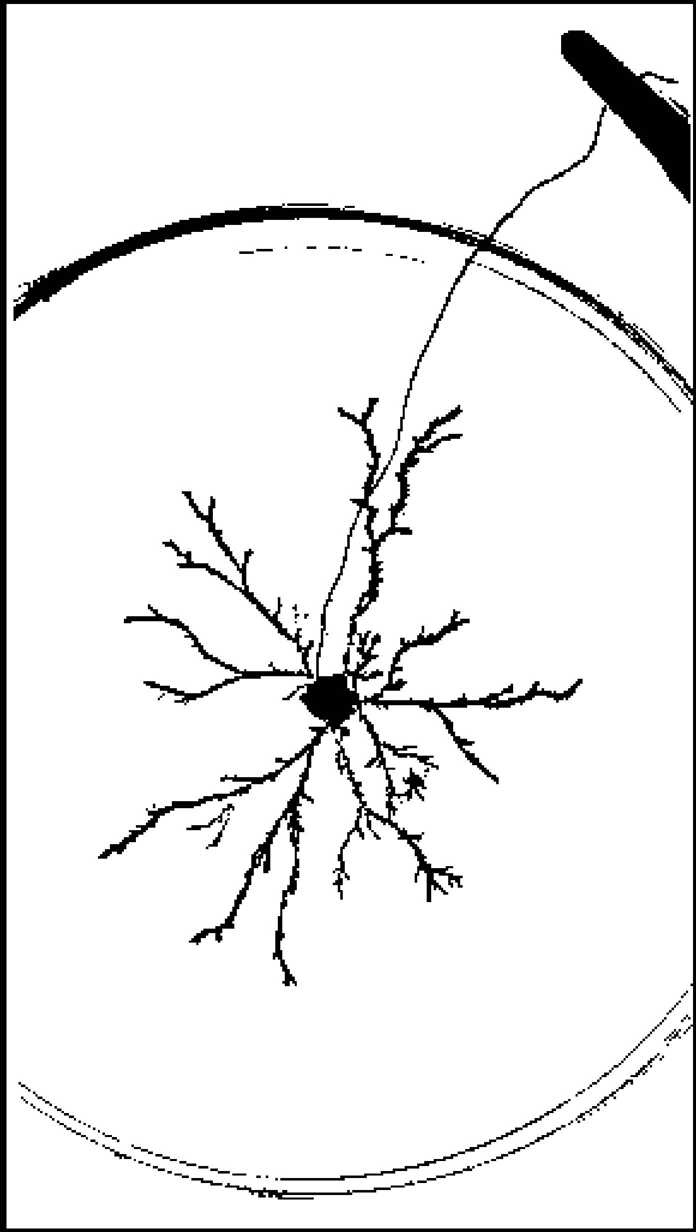
Como caracterizar as suas propriedades ?

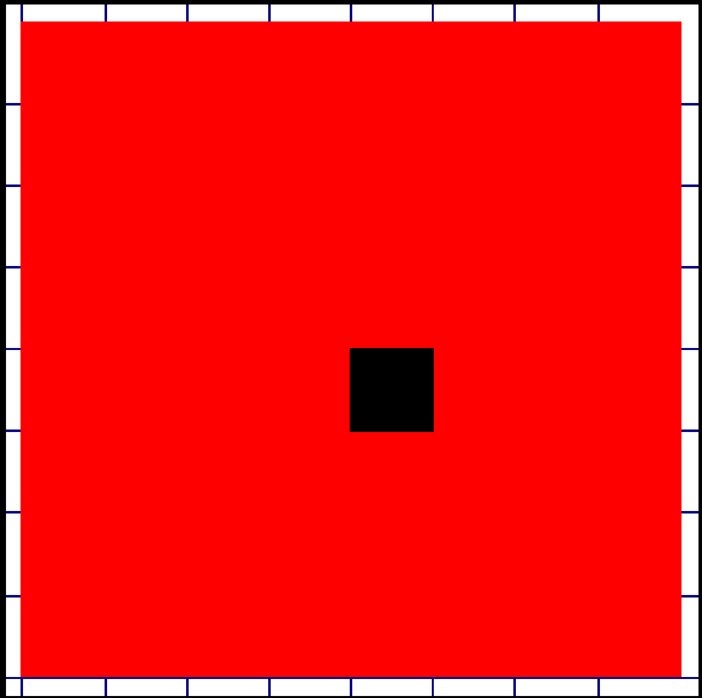
Quais são os modelos que os produzem ?

Um destes fractais é a estrutura produzida por electrodeposição numa experiência simples de reproduzir.

http://classes.yale.edu/fractals/

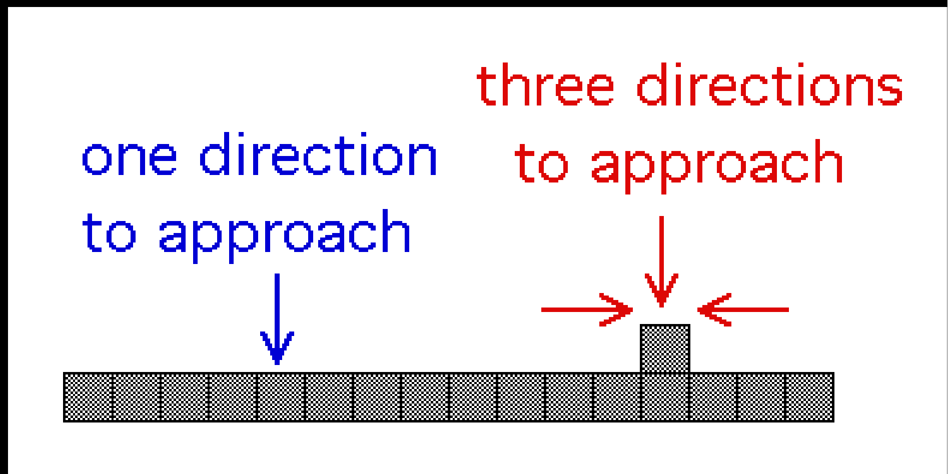




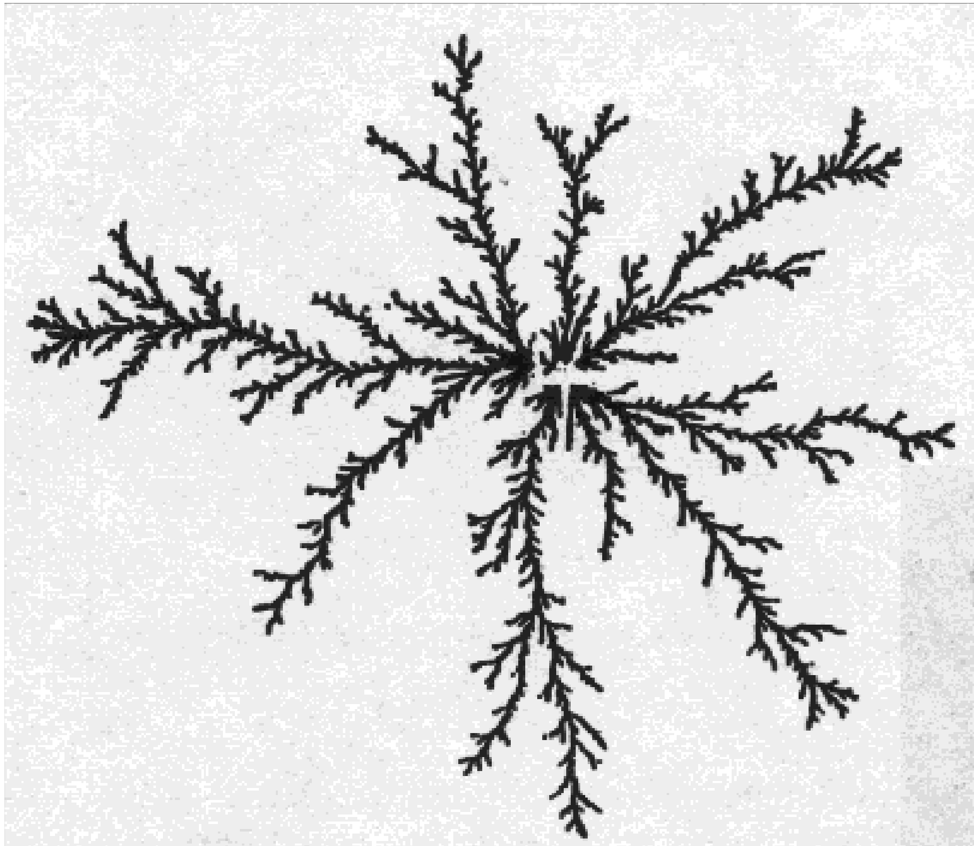


DLA é um modelo muito simpes proposto por Witten e Sander para processos de crescimento por agregação.

Um mecanismo deste tipo amplifica as flutuações de forma, gerando as estruturas com muitas ramificações.

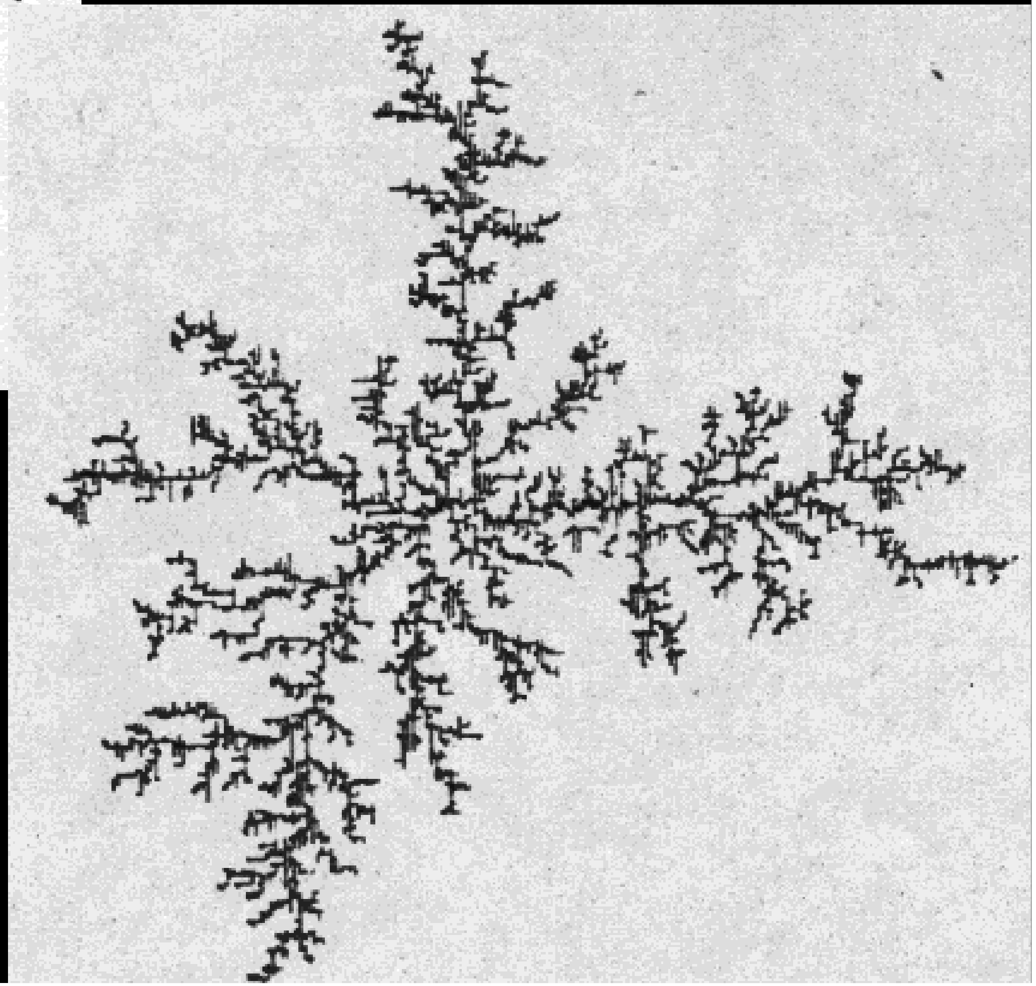


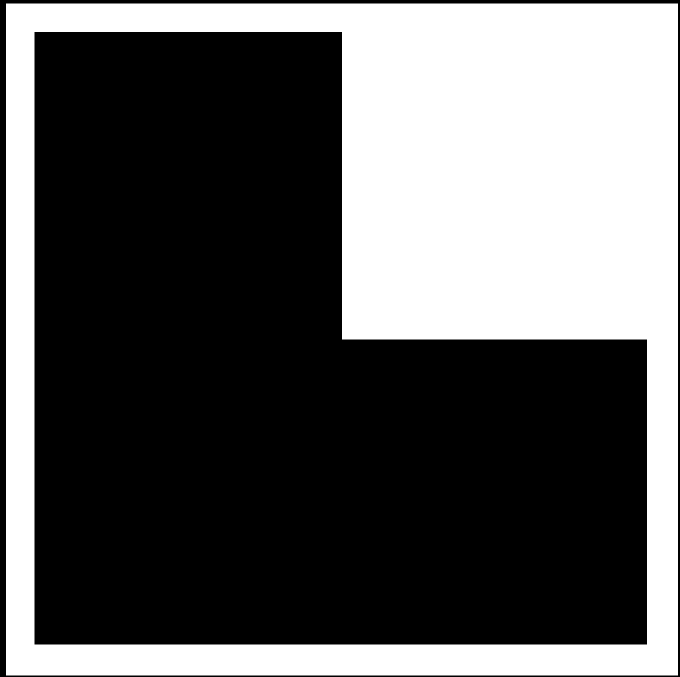
http://classes.yale.edu/fractals/



Experiência ...

...e simulação



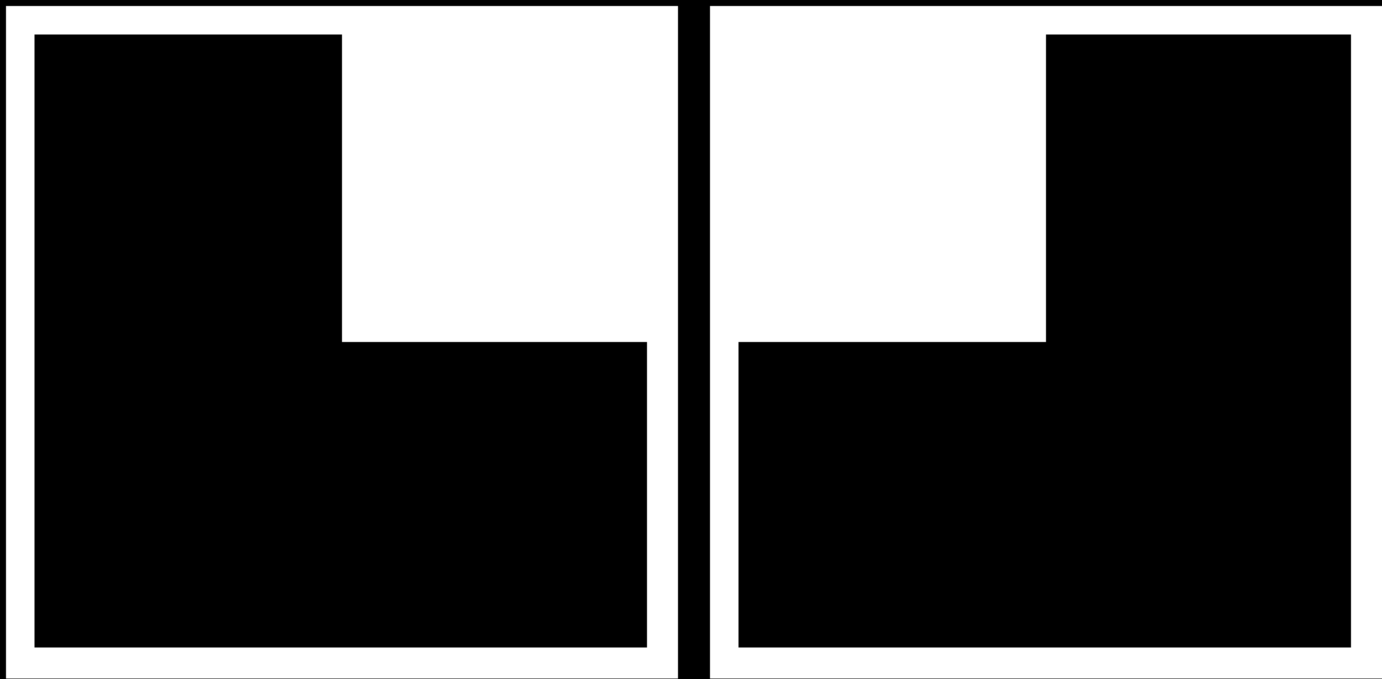


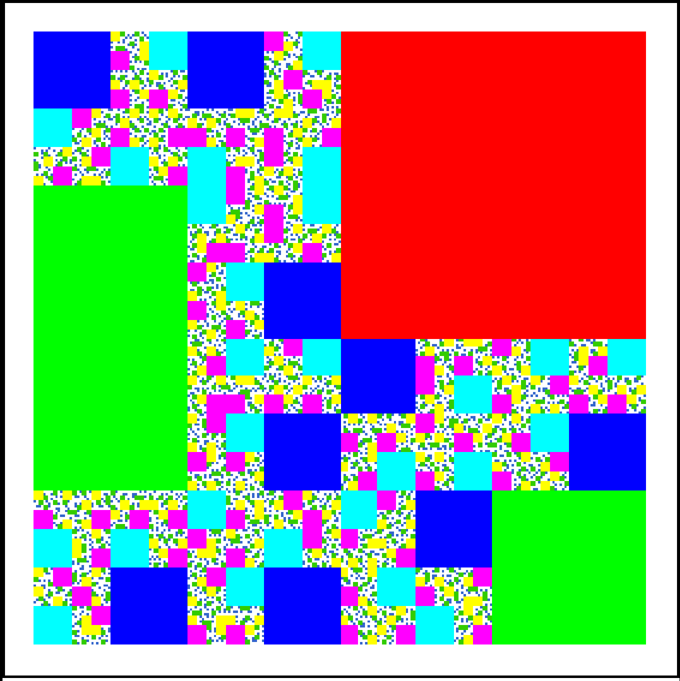
Sierpinski ...

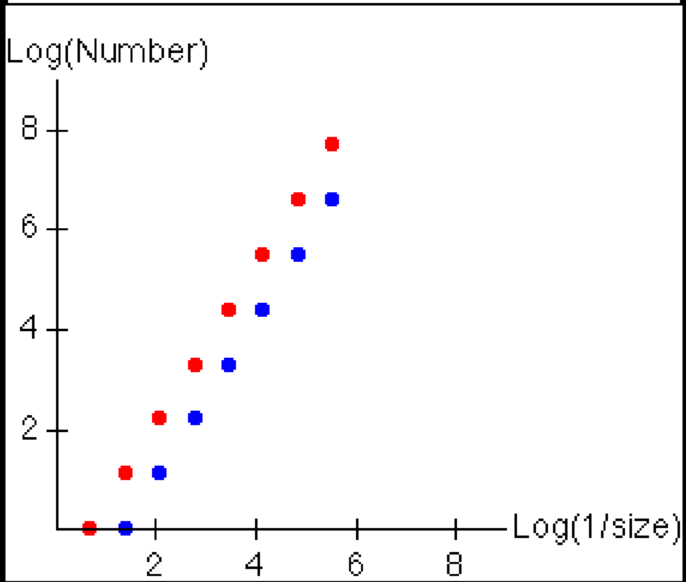
Ou fractais aleatórios.

Em que sentido estes
são também fractais?

http://classes.yale.edu/fractals/







http://classes.yale.edu/fractals/

As três figuras foram obtidas do quadrado de lado 1 retirando

1 quadrado de lado 1/2

3 quadrados de lado 1/4

9 quadrados de lado 1/8

27 quadrados de lado 1/16

....

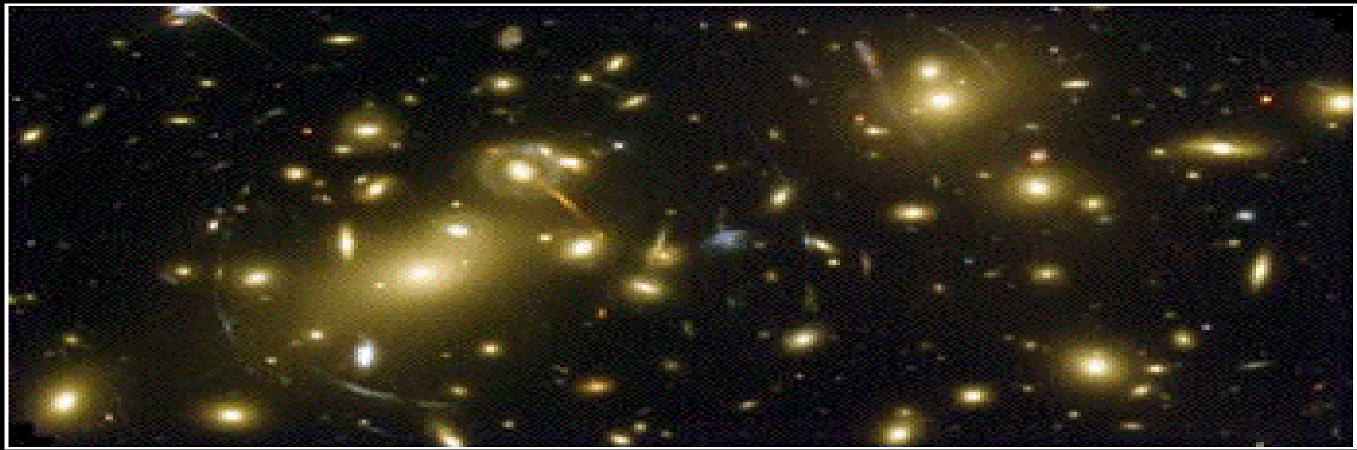
Em termos da sua forma, a figura não é uma cópia rescalada das partes.

Mas as distribuições de número e tamanho de 'buracos' são as mesmas, rescaladas, para o todo e para qualquer região preenchida.

- Estrutura de larga escala do universo

A distribuição de galáxias até distâncias da ordem de 50 mlyrs tem uma estrutura fractal, com d ~ 1.2

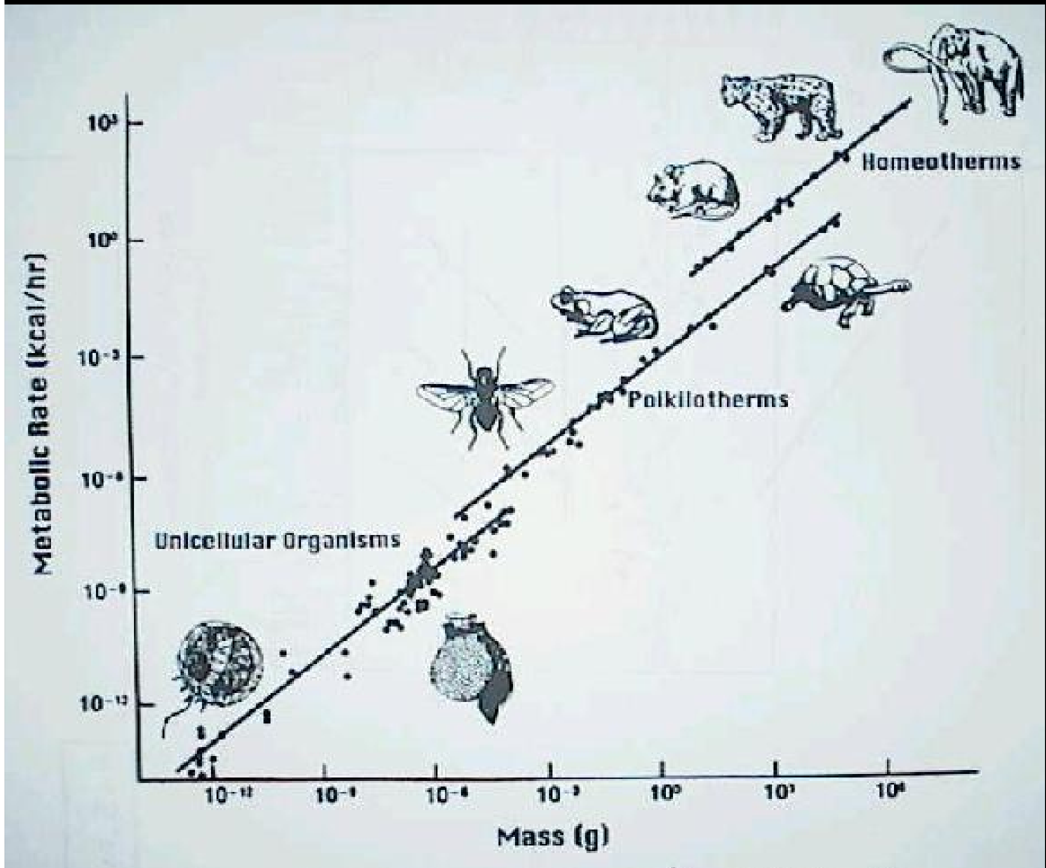
E a distâncias maiores ?



A existência de uma escala a partir da qual a distribuição é homogénea é ainda um problema em aberto.

O universo pode ser isotrópico e ... fractal.

▪Relações alométricas e scaling em biologia



Allometric scaling of metabolic rate for a selection of homeotherms (birds and mammals), poikilotherms (fish, reptiles, amphibians, and invertebrates), and unicellular organisms. The solid lines all have a slope of .75. Modified from Hemmingsen, 1960.

Lei de Kleiber

$$P = c\,M^{3/4}$$

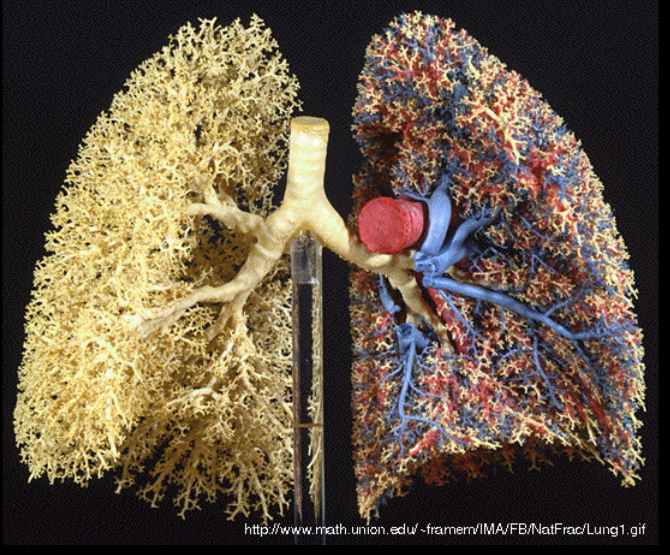
O expoente 3/4 mantem-se com a massa a variar 18 ordens de grandeza

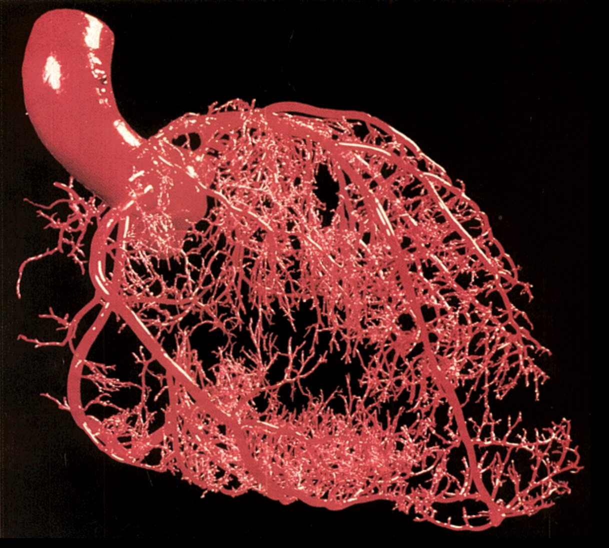
Um modelo fractal que explica este expoente foi proposto por uma equipa de físicos e biólogos

G West, J Brown e B Enquist, Science 276 (1997)

Hipóteses do modelo

- A todas as escalas os organismos dependem do transporte de nutrientes
- Esse transporte dá-se numa rede fractal que 'enche' o espaço
- O tamanho da ramificação mais pequena é um invariante
- A energia dissipada no transporte foi minimizada pela evolução





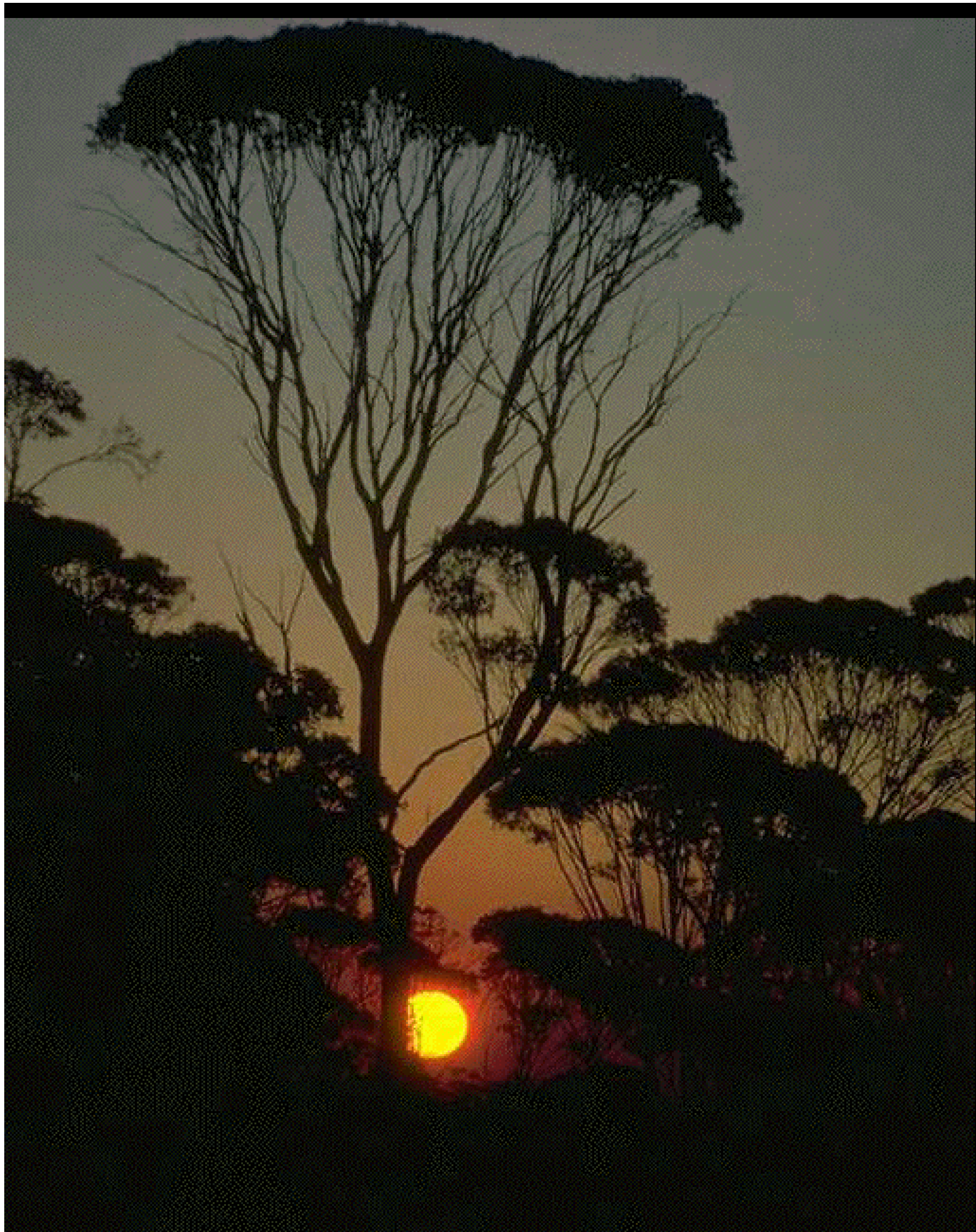
R McNeill Alexander, Energy for Animal Life, Oxford, 1999, pp. 29-32

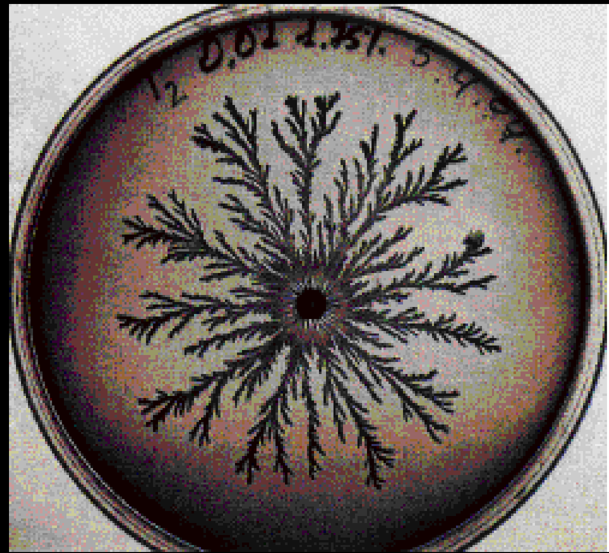
- Outros exemplos de fractais na natureza

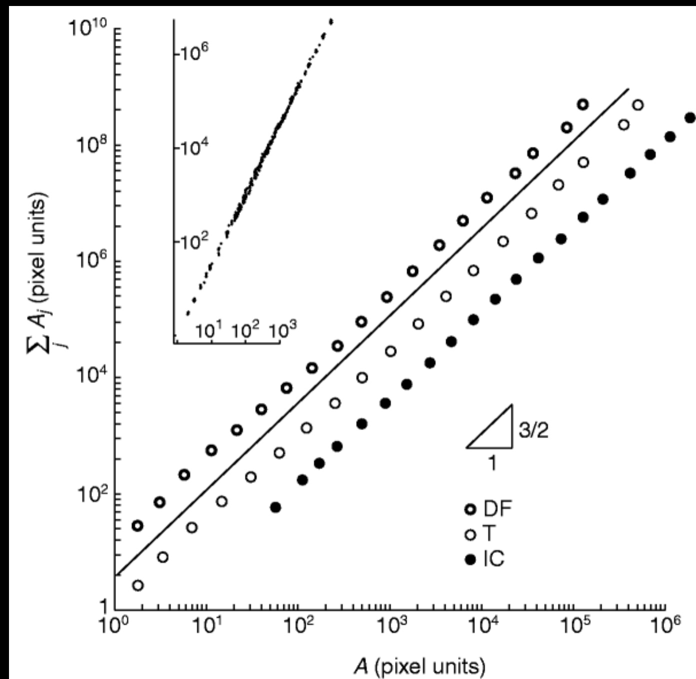
http://classes.yale.edu/fractals/

How long
is the coast of Britain?

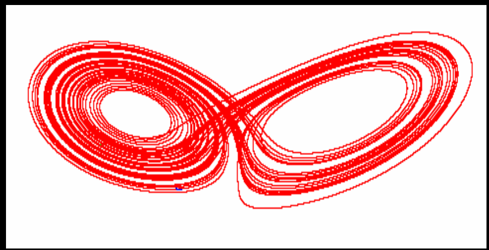
Mandelbrot, B. B.,
Science 156 (1967),
636-638.





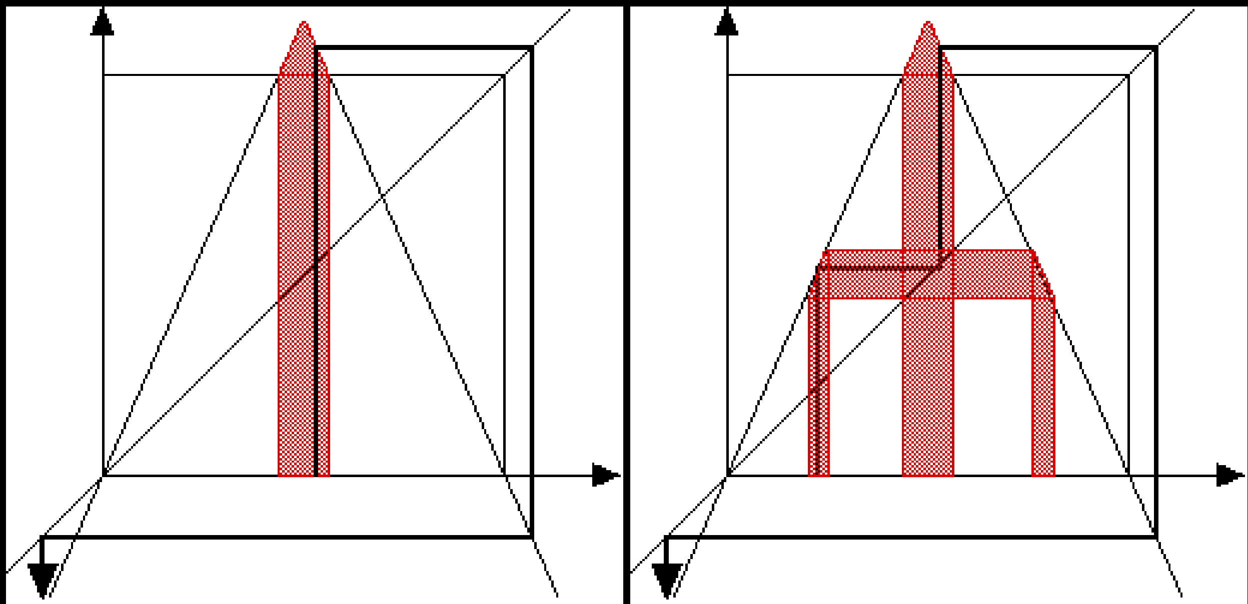

$\sum_j A_j$ (pixel units)
A (pixel units)
3/2
1
DF
T
IC

- Fractais e dinâmica caótica



Atractores e, em geral, conjuntos invariantes fractais são comuns em sistemas caóticos.

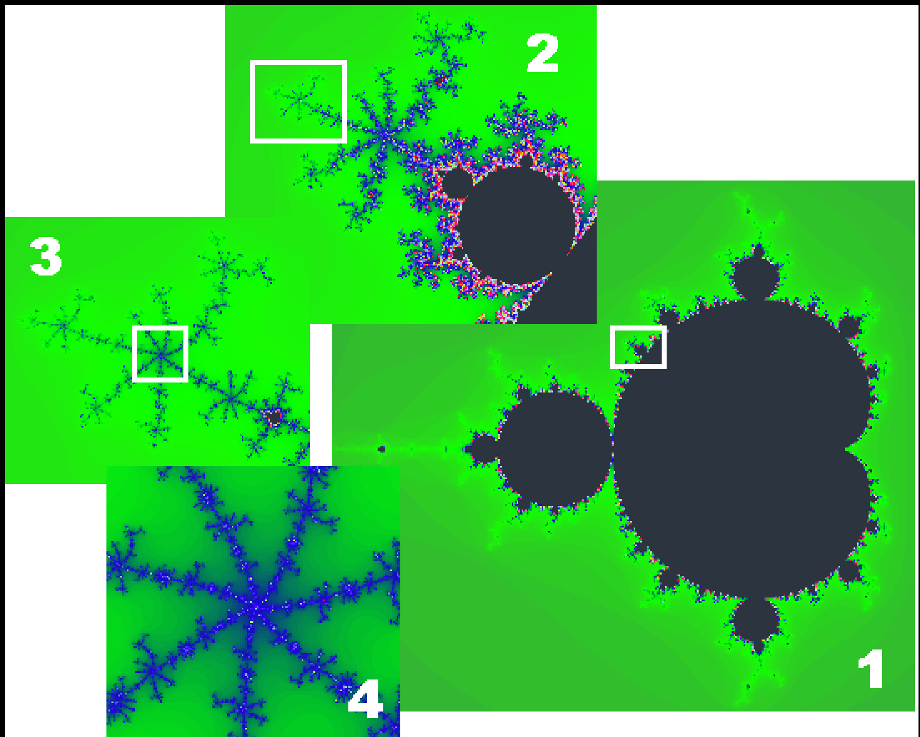
Um modelo geométrico para a dinâmica caótica é a operação de esticar e dobrar, aplicada iterativamente.



Se o estiramento for grande, há pontos que em cada iteração se ‘perdem’. As pré-imagens desses pontos são ‘buracos’, não pertencem ao conjunto invariante.

http://classes.yale.edu/fractals/

▪Dinâmica complexa e o conjunto de Mandelbrot



O conjunto de Mandelbrot é uma das imagens fractais mais famosas.

O conjunto de Mandelbrot é a região a preto. O objecto fractal é a sua fronteira, que tem dimensão 2.

O que é o conjunto de Mandelbrot ?

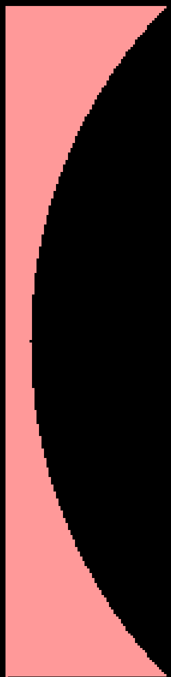
O que significam as cores destas figuras?

O conjunto de Mandelbrot é um diagrama de bifurcação para uma família de aplicações quadráticas, como a aplicação logística.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Mas agora a variável dinâmica z e o parâmetro c tomam valores complexos.

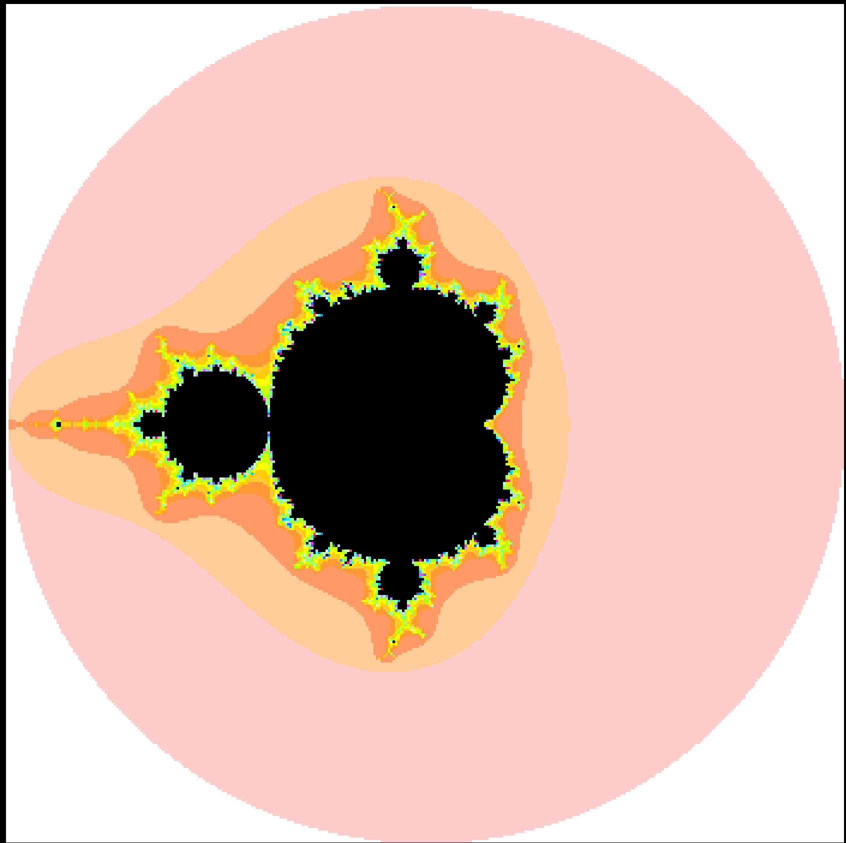
O conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c para os quais a órbita de $z_0 = 0$ não se escapa para o infinito, o que acontece sempre que z_n sai do círculo de raio 2 à volta da origem.



Nesta sucessão de figuras representa-se a preto o conjunto de valores de c para os quais de z_n não sai desse círculo, tomando $n = 1, \ldots, 25$.

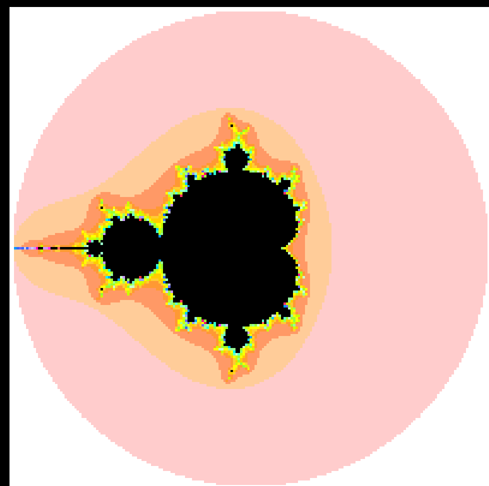
O conjunto de Mandelbrot vai aparecendo com mais detalhe.

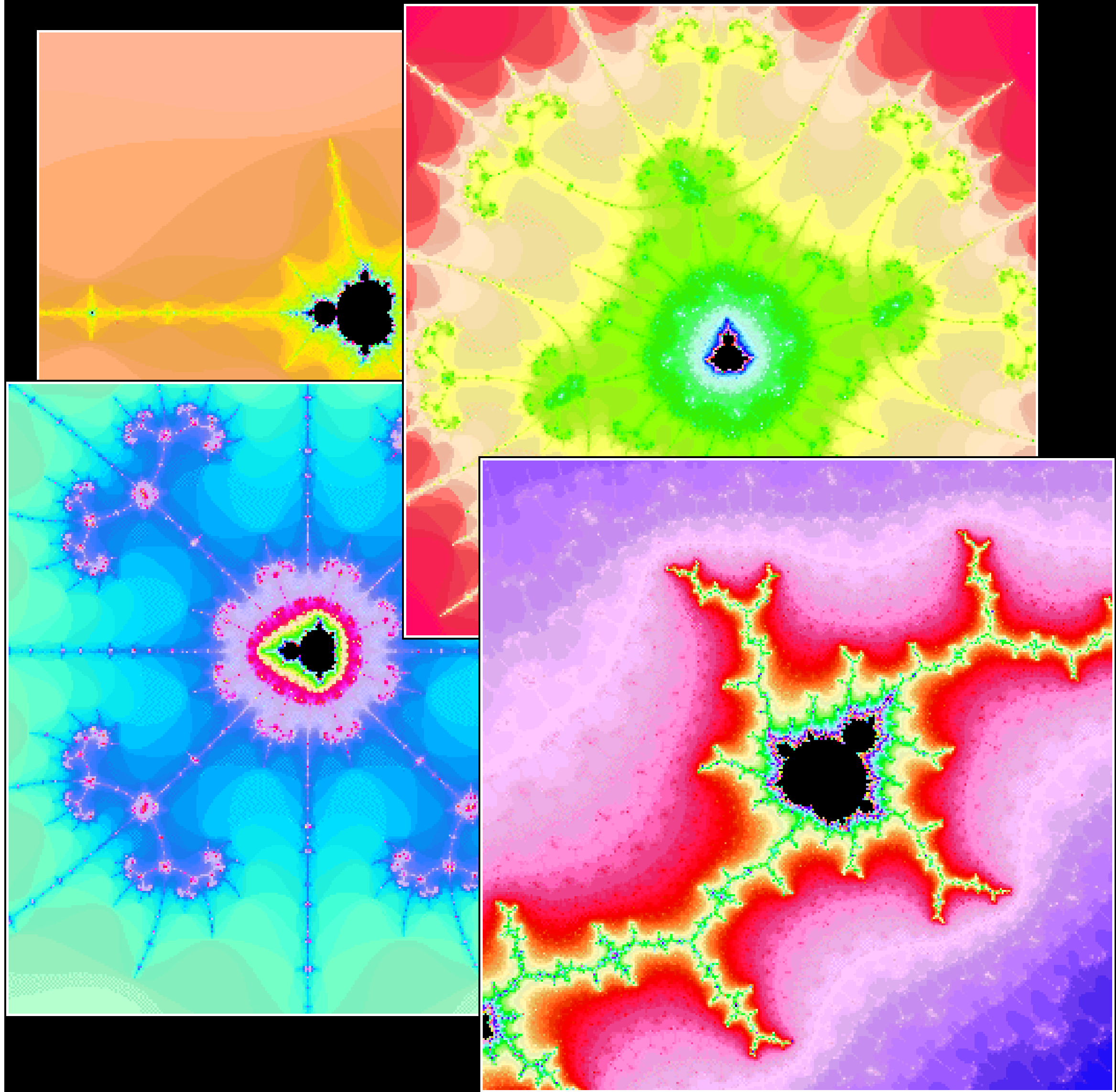
http://classes.yale.edu/fractals/



Aumentando o número de iteradas e a resolução, esse detalhe aparece a todas as escalas, e inclui um halo de cópias da estrutura principal.

Ao contrário dos fractais gerados por transformações iteradas, essas cópias diferem de rescalamentos da estrutura principal.





O conjunto de Mandelbrot é conexo.

As cópias do halo, que parecem ilhas, estão de facto ligadas à estrutura principal. Essa ligação não é visível com esta resolução.

The purpose of science is to revive and cultivate a perpetual state of wonder. For nothing deserves wonder so much as our capacity to experience it.

R Hoffman e S Leibowitz-Schmidt
Old Wine, New Flasks : Reflections on Science and Jewish Tradition

Fractais e a geometria da natureza

Bibliografia

- http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA
- http://classes.yale.edu/fractals/
- Fractals everywhere
  M F Barnsley, M Kaufmann, 2000 [bib CI, bib FCUL]
- Fractals in Science
  S Havlin e A Bunde, Springer, 1995 [bib CI]
- Chaos and Fractals: New Frontiers of Science
  H O Peitgen et al., Springer, 1992 [bib CI]

4 de Novembro de 2008

Dos cristais de gelo
aos fogos florestais

Margarida Telo da Gama
CFTC e DF FCUL